Esercitazione 7 - Complessità

24-05-2019

Antonio Cruciani
antonio.cruciani@alumni.uniroma2.eu

Esercizi a lezione

Esercizio 1:
Testo e soluzioni dell'esercizio nella dispensa: Esercizi: la classe NP esercizio: 9.41

Esercizio 2:
Si consideri il seguente problema Γ: dati un grafo $G = (V, E)$ orientato e un intero $k \in \mathbb{N}$, decidere se esiste un sottoinsieme di V di dimensione al più k la cui rimozione dall'insieme V induca un nuovo Grafo che non contiene cicli. Dopo aver formalizzato il suddetto problema mediante la tripla $\langle I, S, \pi \rangle$, si risponda alle seguenti domande (nell'ordine che si ritiene opportuno), motivando in tutti i casi la propria risposta.

a) Il problema è in **P**?

b Il problema è in **NP**?

c) Il problema è in **CoNp**?

Esercizi per casa

Esercizio 1:
Si consideri il seguente problema: dati un insieme $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq \mathbb{N}$ ed un intero k, decidere se esiste un sottoinsieme di A la cui somma degli elementi è esattamente k.
Dopo aver formalizzato il suddetto problema mediante la tripla $\langle I, S, \pi \rangle$, si risponda alle seguenti domande (nell'ordine che si ritiene opportuno), motivando in tutti i casi la propria risposta.

a) Il problema è in **P**?

b) Il problema è in **NP**?

c) Il problema è in **CoNP**?

Esercizio 2:
Si consideri il seguente problema: dati un insieme $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ una collezione di elementi $\mathbb{C} \subseteq X \times X$ di coppie di elementi di X e un intero $k \in \mathbb{N}$ decidere se esiste un sottoinsieme X' di X di cardinalità al più k tale che, per ogni $C \in \mathbb{C}, C \cap X' \neq \emptyset$.
Dopo aver formalizzato il suddetto problema mediante la tripla $\langle I, S, \pi \rangle$ si risponda alle seguenti domande (nell'ordine che si ritiene opportuno), motivando in tutti i casi la propria risposta.

a) Il problema è in **P**?

b) Il problema è in **NP**?

c) Il problema è in **CoNP**?

Soluzioni esercizi a lezione

Esercizio 2:
Formalizziamo il problema Γ:

$$I_\Gamma = \{\langle G = (V,E), k\rangle : \text{ G È UN GRAFO ORIENTATO } \wedge k \in \mathbb{N}\}$$
$$S_\Gamma(G,k) = \{V' \subseteq V\}$$
$$\pi_\Gamma(G,k,S_\Gamma(G,k)) = \exists V' \in S_\Gamma(G,k) : |V'| \leq k \wedge G - V' \text{ È UN DAG}$$

Mostriamo l'appartenenza di Γ alla classe **NP**.
Un certificato per una istanza G,k è un sottoinsieme V' di V il quale ha lunghezza **O**(|V|), inoltre, verificare se un certificato è una soluzione effettiva significa verificare il predicato:

$$\eta_\Gamma(G,k,S_\Gamma(G,k)) = |V'| \leq k \wedge G - V' \text{ È UN DAG}$$

e tale verifica può essere fatta in **O**(|E|+|V|), quindi il problema è in **NP**.

Quindi abbiamo mostrato che il problema appartiene a **NP**. Mostriamo che inoltre il problema è completo per **NP**, a tale scopo mostriamo una riduzione polinomiale dal problema VERTEX COVER che sappiamo essere **NP**-Completo.
Sia ϕ la funzione di riduzione polinomiale che trasforma un' istanza di VERTEX COVER (Ovvero una coppia grafo non orientato e k intero) in una istanza di Γ. Sia $\langle G,k\rangle$ un'istanza di VERTEX COVER ad essa facciamo corrispondere un' istanza $\langle G',k\rangle$ di Γ

$$\langle G,k\rangle \xrightarrow{\phi} \langle G',k\rangle$$

Dove G'=(V,E') è definito come segue:

- $V = V$
- $E' = \{(u,v),(v,u) : (u,v) \in E\}$

Osserviamo esplicitamente che $\phi \in$ **FP**
E' facile osservare che:

$$\exists \text{ istanza si di VERTEX COVER } \iff \exists \text{ istanza si di } \Gamma$$

Dimostriamolo:
Sia $\langle G,k\rangle$ un'istanza si di VERTEX COVER, questo significa che esiste un un sottoinsieme V' di V di dimensione al più k tale che $\forall(u,v) \in E[u \in V' \vee v \in$

$V']$. Osserviamo che ogni arco in G è incidente ad almeno un vertice di $V' \subseteq V$. Chiaramente, per come abbiamo definito la riduzione polinomiale, ogni arco diretto di G' è anch'esso incidente con almeno un nodo di V' (in G'). Quindi ogni ciclo in G' deve includere un nodo di V'. Questo ci dice che rimuovendo tale V' dall' insieme dei nodi V di G' otteniamo quello che è un Grafo Diretto Aciclico. Ottenendo quindi un'istanza si di Γ.

Sia, ora, $\langle G', k \rangle$ un'istanza si di Γ, ovvero esiste un $V' \subseteq V$ in G' di dimensione al più k che se rimosso induce un DAG. Quindi per definizione ogni ciclo di G' deve includere un nodo in V'. Si consideri un qualsiasi ciclo di lunghezza 2. Esso è composto da una coppia di archi diretti fra due nodi. Quindi, per quanto appena osservato, V' deve contenere almeno un vertice di ogni ciclo di lunghezza 2 in G'. Per come abbiamo definito la funzione di riduzione polinomiale, per ogni arco in G (di Vertex Cover) che connette due nodi, G' contiene un ciclo di lunghezza 2 composto dagli stessi due nodi. Quindi, poiché $\langle G', k \rangle$ è un'istanza si, allora V' in G' contiene almeno un nodo per ogni coppia di nodi che fanno parte di un ciclo di lunghezza 2, osserviamo esplicitamente che tale V' induce un Vertex Cover in G, ottenendo quindi un'istanza si di Vertex Cover.

Quindi possiamo concludere che Γ è **NP**-Completo.
Quindi, dopo questa dimostrazione di completezza per **NP** possiamo concludere l'esercizio rispondendo alle domande (ricordando le due congetture fondamentali della complessità computazionale):

b) Si ed è completo per **NP**

a) No, in quanto se fosse in **P** allora avremmo che **P=NP**

c) No in quanto se fosse in **CoNP** avremmo che **coNP=NP**

Soluzioni esercizi per casa

Esercizio 1:
Formalizziamo il problema, che chiameremo Γ mediante la tripla $\langle I, S, \pi \rangle$:

$$I_\Gamma = \{\langle A, k \rangle : A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N}\}$$
$$S_\Gamma(A, k) = \{A' \subseteq A\}$$
$$\pi_\Gamma(A, k, S_\Gamma(A, k)) = \exists A' \in S_\Gamma(A, k) : \sum_{a_i \in A'} a_i = k$$

Mostriamo l'appartenenza di Γ alla classe **NP**.
Un certificato per una istanza A,k è un sottoinsieme A' di A il quale ha lunghezza **O**(|A|), inoltre, verificare se un certificato è una soluzione effettiva significa verificare il predicato:

$$\eta_\Gamma(A, k, S_\Gamma(A, k)) = \textstyle\sum_{a_i \in A'} a_i = k$$

e tale verifica può essere fatta in **O**(|A|), quindi il problema è in **NP**.

Quindi abbiamo mostrato che il problema appartiene a **NP**. Mostriamo che inoltre il problema è completo per **NP**, a tale scopo mostriamo una riduzione polinomiale dal problema Vertex Cover che sappiamo essere **NP**-Completo.
Sia ϕ la funzione di riduzione polinomiale che trasforma un' istanza di Partizione in una istanza di Γ. Sia $\langle G, k \rangle$ un'istanza di Vertex Cover ad essa facciamo corrispondere un' istanza $\langle A, k' \rangle$ di Γ

$$\langle G, k \rangle \xrightarrow{\phi} \langle A, k' \rangle$$

Dove, data un'istanza di Vertex Cover, l'idea è quella di numerare da $0, \ldots, |E|-1$ gli archi di G e per ogni arco $i \in \{0, \ldots, |E|-1\}$ definiamo $a_i = 10^i$. Inoltre, per ogni nodo $u \in V$ creiamo l'intero

$$b_u = 10^{|E|} + \sum_{i \in \delta(u)} 10^i$$

Quindi abbiamo che

$$A = \{a_0, \ldots a_{|E|-1}\} \cup \{b_u : u \in V\}$$

e infine scegliamo

$$k' = k \cdot 10^{|E|} + \sum_{i=0}^{|E|-1} 2 \cdot 10^i$$

Mostriamo ora che

$$\exists \text{Vertex Cover di size } \leq k$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\exists \text{ Sottoinsieme di A la somma dei cui elementi è esattamente } k'$$

Si osservi che per come abbiamo costruito l'insieme A e definito k' il primo termine di quest'ultimo forza ad usare **esattamente** k nodi

$$\boldsymbol{k \cdot 10^{|E|}} + \sum_{i=0}^{|E|-1} 2 \cdot 10^i$$

e il secondo termine:

$$k \cdot 10^{|E|} + \boldsymbol{\sum_{i=0}^{|E|-1} 2 \cdot 10^i}$$

forza che **ogni** arco venga coperto.

Sia $\langle G, k \rangle$ una istanza si di VERTEX COVER, allora esiste un $V' \subseteq V$ tale che $|V'| \leq k$ che induce una copertura dei vertici di G, allora in A esiste un sottoinsieme di elementi la cui somma è esattamente k', in quanto possiamo selezionare gli elementi $b_u \; : \; u \in V'$ e alcuni elementi a_i ottenendo $\sum_{i=0}^{|E|-1} 2 \cdot 10^i$ che sommati al valore dato da $k \cdot 10^{|E|}$ ci permettono di avere un sottoinsieme $A' \in A : \sum_{x \in A'} x = k$ e quindi un'istanza si di Γ.

Sia ora $\langle G, k \rangle$ una istanza no di VERTEX COVER, allora $\nexists V' \subseteq V : |V'| \leq k$ che induce una copertura dei vertici del grafo G, di conseguenza in $\langle A, k' \rangle$ di Γ non riusciamo a selezionare un sottoinsieme $A' \subseteq A$ la somma dei cui elementi è esattamente k' in quanto abbiamo che poiché non esiste un VERTEX COVER in G significa che non esiste un sottoinsieme dei nodi di V che copra tutti gli archi. Ovvero, o per coprire tutti gli archi del grafo dobbiamo selezionare un sottoinsieme più grande di k e per come abbiamo definito $\langle A, k' \rangle$ è facile verificare che non riusciamo a trovare un sottoinsieme di A la cui somma degli elementi sia proprio k'.
Questo termina la prova, abbiamo che $\Gamma \in \boldsymbol{NPC}$
Quindi, dopo questa dimostrazione di completezza per **NP** possiamo concludere l'esercizio rispondendo alle domande (ricordando le due congetture fondamentali della complessità computazionale):

b) Si ed è completo per **NP**

a) No, in quanto se fosse in **P** allora avremmo che **P=NP**

c) No in quanto se fosse in **CoNP** avremmo che **coNP=NP**

Esercizio 2:
Formalizziamo il problema, che chiameremo Γ mediante la tripla $\langle I, S, \pi \rangle$:

$I_\Gamma = \{\langle X, \mathbb{C}, k \rangle : X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \wedge \mathbb{C} \subseteq X \times X \wedge k \in \mathbb{N}\}$
$S_\Gamma(X, \mathbb{C}, k) = \{X' \subseteq X\}$
$\pi_\Gamma(X, \mathbb{C}, k, S_\Gamma(X, \mathbb{C}, k)) = \exists X' \in S_\Gamma(X, \mathbb{C}, k) : |X'| \leq k \wedge \forall C \in \mathbb{C}[C \cap X' \neq \emptyset]$

Mostriamo l'appartenenza di Γ alla classe **NP**.
Un certificato per una istanza X,ℂ,k è un sottoinsieme X' di X il quale ha lunghezza **O**(|X|), inoltre, verificare se un certificato è una soluzione effettiva significa verificare il predicato:

$$\eta_\Gamma(X, \mathbb{C}, k, S_\Gamma(X, \mathbb{C}, k)) = |X'| \leq k \wedge \forall C \in \mathbb{C}[C \cap X' \neq \emptyset]$$

e tale verifica può essere fatta in **O**(|X| |ℂ|), quindi il problema è in **NP**.

Quindi abbiamo mostrato che il problema appartiene a **NP**. Mostriamo che inoltre il problema è completo per **NP**, a tale scopo mostriamo una riduzione polinomiale dal problema Vertex Cover che sappiamo essere **NP**-Completo.
Sia ϕ la funzione di riduzione polinomiale che trasforma istanze di VC in istanze di Γ nel seguente modo.

$$\langle G = (V, E), k \rangle \xrightarrow{\phi} \langle X, \mathbb{C}, k \rangle$$

Sia $I_{VC}\langle G = (V, E), k \rangle$ un'istanza di Vertex Cover allora $\phi(G, K)$ opererà come segue:

- $X = V$
- $\mathbb{C} = E$
- k rimane lo stesso

Ora dimostriamo che:

$$\exists \text{ istanza si di Vertex Cover} \iff \exists \text{ istanza si di } \Gamma$$

Dimostrazione:
Sia $< G = (V, E), k >$ un'istanza si di Vertex Cover, allora esiste un $V' \subseteq V$ tale che esso ha dimensione al più k e induce una copertura dei vertici del grafo. Ovvero, $|V'| \leq k \wedge \forall (u, v) \in E \ [u \in V' \vee v \in V']$.

Osservazione fondamentale:
$|V'| \leq k \wedge \forall (u,v) \in E\ [u \in V' \vee v \in V']$ si può esprimere,anche, nel seguente modo: $|V'| \leq k \wedge \forall C \in E[C \cap V' \neq \emptyset]$
Dopo questa osservazione è chiaro che esiste anche

$$X' \subseteq X : |X'| \leq k \wedge \forall C \in \mathbb{C}[C \cap X' \neq \emptyset]$$

E quindi, scegliendo $V' = X'$ abbiamo un'istanza si anche per Γ.
Ora, è chiaro che se abbiamo un'istanza no di Vertex Cover allora abbiamo un'istanza no di Γ.
Considerazioni: la riduzione ϕ in questo caso è pleonastica in quanto Γ è una formulazione alternativa del problema Vertex Cover, per poter risolvere l'esercizio sarebbe bastato notare e dimostrare l'equivalenza di Γ con Vertex Cover senza effettuare questa riduzione.
Quindi possiamo rispondere alle domande:

b) Si ed è completo per **NP**

a) No, in quanto se fosse in **P** allora avremmo che **P=NP**

c) No in quanto se fosse in **CoNP** avremmo che **coNP=NP**